

Použití metody Lattice Boltzmann pro řešení problémů z oblasti mechaniky tekutin

Lattice Boltzmann Method for Solving Fluid Dynamics Problems

Zadání bakalářské práce

Student: **Jiří Blahoš**

Studijní program: B2647 Informační a komunikační technologie

Studijní obor: 1103R031 Výpočetní matematika

Téma: Použití metody Lattice Boltzmann pro řešení problémů z oblasti
mechaniky tekutin
Lattice Boltzmann method for solving fluid dynamics problems

Zásady pro vypracování:

Cílem práce je seznámení se s metodou Lattice Boltzmann (LBM) a jejím využitím pro řešení úloh z mechaniky proudění. Metoda LBM patří mezi relativně nové metody pro řešení proudění tekutin. Na rozdíl od klasických metod, jako jsou metoda konečných prvků nebo metoda konečných objemů, neřeší tato metoda rovnice zachování hmoty, energie a hybnosti na makroskopické úrovni, ale řeší proudění tekutiny pomocí propagace a vzájemných kolizí fiktivních částic. Použití LBM metody je výhodné zejména při řešení problémů s velmi komplexní geometrií a díky své snadné paralelizovatelnosti i při nasazení této metody na superpočítačích. Součástí práce budou také numerické experimenty, demonstrující chování metody na jednoduchých příkladech.

Seznam doporučené odborné literatury:

Alexander J. Wagner, A Practical Introduction to the Lattice Boltzmann Method, 2008
A reference ze stránek SCS Lattice Boltzmann Research
http://www.science.uva.nl/research/scs/projects/lbm_web/lbm.html

Formální náležitosti a rozsah bakalářské práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí bakalářské práce: **Ing. Tomáš Karásek, Ph.D.**

Konzultant bakalářské práce: Ing. Marta Jarošová, Ph.D.

Datum zadání: 01.09.2014

Datum odevzdání: 07.05.2015



doc. RNDr. Jiří Bouchala, Ph.D.
vedoucí katedry



prof. RNDr. Václav Snášel, CSc.
děkan fakulty

Souhlasím se zveřejněním této bakalářské práce dle požadavků čl. 26, odst. 9 *Studijního a zkušebního řádu pro studium v bakalářských programech VŠB-TU Ostrava*.

V Ostravě 7. května 2015


.....

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně. Uvedl jsem všechny literární prameny a publikace, ze kterých jsem čerpal.

V Ostravě 7. května 2015


.....

Na tomto místě bych rád poděkoval Ing. T. Karáskovi, Ph.D. za jeho cenné rady a připomínky při vedení mé bakalářské práce.

Abstrakt

Cílem této bakalářské práce je seznámení se s metodou Lattice Boltzmann v souvislosti s řešením úloh týkajících se proudění tekutin. Je zde popsána základní myšlenka a kroky algoritmu, který simuluje vývoj stavu tekutiny v čase na 2D oblasti. Práce se rovněž zabývá řešením okrajových podmínek a překážek. Na závěr je metoda demonstrována na implementaci dvou typických úloh proudění - obtékání kruhové překážky (válce) v trubici a proudění v kavitě.

Klíčová slova: Lattice, Gas, Boltzmann, mechanika, tekutin, proudění, 2D, obtékání, válce, kavita

Abstract

The goal of this bachelor thesis is to learn the principles of Lattice Boltzmann method in connection with solving fluid flow problems. It describes the basic idea of the method and the algorithm, which simulates the evolution of fluid state over time in 2D area. The paper also deals with the boundary conditions and obstacles. The last part presents the implementation of two typical fluid flows - flow in a pipe with circular obstacle (cylinder) inside and flow in cavity.

Keywords: Lattice, Gas, Automaton, Boltzmann, fluid, flow, dynamics, convection, 2D, cylinder, cavity

Seznam použitých zkratk a symbolů

CFD	– Computational Fluid Dynamics
FEM	– Finite Element Method
FVM	– Finite Volume Method
LBM	– Lattice Boltzmann Method
LGA	– Lattice Gas Automaton
D2Q5	– 2D Square lattice
D2Q7	– 2D Hexagonal lattice
D2Q9	– 2D Square lattice

Obsah

1	Úvod	4
2	Teorie	5
2.1	Lattice Gas	5
2.1.1	Úvod	5
2.1.2	Mřížka	5
2.1.3	Iterační krok - část propagace	5
2.1.4	Iterační krok - část kolize	7
2.1.5	Hraniční uzly - překážky	7
2.1.6	Zákony zachování	8
2.1.7	Odstranění šumu	9
2.2	Lattice Boltzmann	10
2.2.1	Úvod	10
2.2.2	Distribuční funkce	10
2.2.3	Mřížka	10
2.2.4	Jednotky	12
2.2.5	Iterační krok - část propagace	13
2.2.6	Iterační krok - část kolize	13
2.2.7	Rovnovážný stav distribuční funkce	14
2.2.8	Zákony zachování hmoty a hybnosti	15
2.2.9	Okrajové podmínky	20
3	Implementace	26
4	Numerické experimenty	30
5	Závěr	36
6	Reference	37

Seznam obrázků

1	Element mřížky D2Q4.	6
2	Element mřížky D2Q7.	6
3	Příklad kolizního pravidla pro LGA 1	8
4	Příklad kolizního pravidla pro LGA 2	8
5	Příklad kolizního pravidla pro LGA 3	9
6	Příklad kolizního pravidla pro LGA 4	9
7	Element mřížky D2Q9	11
8	Pravidlo "bounce-back".	21
9	Pravidlo "halfway bounce-back".	22
10	Hraniční uzel mřížky D2Q9.	23
11	Diagram průběhu výpočtu metody LBM.	27
12	Kvadratický profil rychlosti.	31
13	Obtékání válce: Reynoldsovo číslo 50, krok 0	31
14	Obtékání válce: Reynoldsovo číslo 50, krok 6000	32
15	Obtékání válce: Reynoldsovo číslo 50, krok 6000	32
16	Obtékání válce: Reynoldsovo číslo 200, krok 6000	33
17	Obtékání válce: Reynoldsovo číslo 200, krok 6000	33
18	Obtékání válce: Reynoldsovo číslo 200, krok 6000	34
19	Kavita: Reynoldsovo číslo 200, krok 10000	34
20	Kavita: Reynoldsovo číslo 200, krok 10000	35

Seznam výpisů zdrojového kódu

1	Inicializace simulace (obtékání válce).	26
2	Inicializace tekutiny (obtékání válce).	26
3	Hlavní smyčka.	26
4	Kolizní část iteračního kroku.	28
5	Pravidlo "bounce-back".	28
6	Okrajová podmínka Zou-He - makroskopická část (kavita).	28
7	Okrajová podmínka Zou-He - mikroskopická část (kavita).	29

1 Úvod

Modelování chování tekutin patří v dnešní době mezi rychle se rozvíjející odvětví matematiky a fyziky. Zahrnuje mnoho významných úloh z technické praxe, jako je modelování vzdušných proudů v atmosféře, vodních proudů v oceánech, dále pak obtékání těles jako jsou automobily, letadla či raketoplány. Řešení takovýchto úloh má za cíl lepší pochopení přírodních jevů a získání možnosti tyto jevy alespoň částečně předvídat. V oblasti strojní konstrukce je pak cílem například získání optimálních konstrukčních tvarů pro dané zařízení z hlediska efektivity.

Chování tekutin je v praktických případech často popsáno pomocí nelineárních parciálních diferenciálních rovnic. Jedním z nejběžnějších popisů jsou tzv. Navier-Stokesovy rovnice. Ty mají pro nestlačitelné proudění tento tvar [6]:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot (\nabla \mathbf{u}) - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{F} \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

kde \mathbf{u} je vektor rychlosti proudění, ν je kinematická viskozita, p je tlak a \mathbf{F} je síla působící na tekutinu. Tyto rovnice však nemají ve své obecné podobě a pro obecně specifikovaný problém přesné analytické řešení. Důkaz existence obecného analytického řešení těchto rovnic v \mathbb{R}^3 je jedním ze sedmi problémů milénia, které vypsál v roce 2000 Clayův matematický institut a za jejichž vyřešení je odměna jeden milion dolarů.

Navier-Stokesovy rovnice se tedy v praxi většinou řeší numericky. Takovýchto způsobů řešení existuje několik, a souhrnně spadají do kategorie s anglickým názvem Computational Fluid Dynamics (CFD). Mezi nejpobulárnější současné numerické metody řešení problémů proudění tekutin patří metoda konečných prvků (Finite Element Method - FEM) a metoda konečných objemů (Finite Volume Method - FVM). Obě tyto metody používají určitou formu diskretizace prostoru, tedy jeho rozdělení na konečný počet konečně velkých prvků. Mezi těmito prvky se poté pomocí lineárních rovnic definují základní fyzikální vztahy jako zákony zachování hmoty a hybnosti. Zároveň se na okrajích výpočetní oblasti definují okrajové podmínky, podle zadání problému. Tento postup tedy ve výsledku vede na sestavení a řešení soustavy lineárních rovnic.

Metoda Lattice Boltzmann (Lattice Boltzmann Method - LBM), která je hlavním předmětem této práce, rovněž spadá mezi numerické metody řešení úloh proudění. Dá se ukázat, že při volbě vhodného kolizního operátoru (který bude popsán později) lze z předpisů pro výpočet metody LBM odvodit Navier-Stokesovy rovnice [7]. Stejně jako metody FEM a FVM, i v metodě LBM dochází k diskretizaci prostoru na mřížku uzlů. Tato mřížka je ovšem vždy ekvidistantní, narozdíl od metod FEM a FVM, kde tomu tak nemusí být. Další rozdíl spočívá v tom, že se v uzlech mřížky uvažují fiktivní částice, které se pohybují po mřížce a vzájemně spolu interagují. Tyto částice mají reprezentovat základní stavební jednotky, ze kterých se daná tekutina skládá. Jedná se tedy o mikroskopické částice, kterých je v každém uzlu mřížky určité množství, a pohybují se určitými rychlostmi. Z těchto mikroskopických veličin lze pomocí jednoduchých předpisů spočítat makroskopické veličiny jako je hustota, tlak nebo rychlost tekutiny v daném místě.

2 Teorie

2.1 Lattice Gas

2.1.1 Úvod

Za předchůdce LBM je považována metoda Lattice Gas (Lattice Gas Automaton - LGA), jejíž vývoj započal na přelomu 60. a 70. let. Tato metoda přichází s myšlenkou simulace dynamiky tekutiny pomocí simulace chování jejích základních mikroskopických součástí, kterými mohou být například atomy nebo molekuly. Zákony zachování hmoty a hybnosti jsou definovány již na úrovni interakce mezi těmito mikroskopickými částicemi. Jedná se o tzv. celulární automat, tedy o pravidelnou mřížku uzlů, který se každý nachází v jednom z konečného počtu možných stavů. Tyto stavy se postupně mění v závislosti na stavech okolních uzlů v jednotlivých iteračních krocích.

2.1.2 Mřížka

Částice jsou rozloženy na pravidelné mřížce. U metody LGA se ve 2D jako první používala pro jednoduchost mřížka D2Q4. Buňka této mřížky je na obrázku 1. Později se ovšem začala více používat mřížka D2Q7, ve které má každý uzel více sousedů, díky čemuž je na této mřížce kromě hmotnosti a hybnosti zachován i moment hybnosti [1]. Element této mřížky je na obrázku 2.

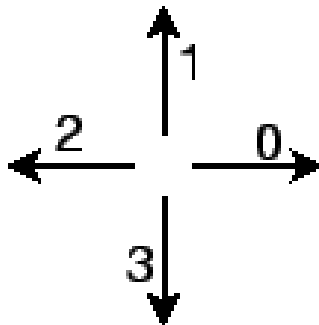
V každém bodě mřížky se může nacházet určitý (diskrétní) počet částic, v případě D2Q7 maximálně 7. Bod mřížky D2Q7 může obsahovat statickou částici, setrvávající na jednom místě, a pak po jedné další částici pro každý dostupný sousední uzel, jejíž vektor přesunu směřuje k tomuto sousednímu uzlu. Existuje tedy konečně mnoho možných vektorů přesunu, jakými se každá částice může pohybovat. Jeden pro každý sousední uzel, a pak jeden nulový, pro statickou částici. Tyto vektory jsou pevně dané tvarem mřížky.

Označme výskyty částic na uzlu mřížky jako f_{0-6} , kde každá z těchto veličin nabývá buď hodnoty 1, v případě, kdy se v daném uzlu mřížky vyskytuje částice pohybující se i -tým směrem, nebo hodnoty 0, v případě, že se takováto částice v uzlu nevyskytuje. Hodnotu f s posledním možným indexem s nulovým základem (u hexagonální mřížky tedy f_6) budeme označovat výskyt statické částice, tedy částice s nulovou rychlostí, a indexy od 0 po předposlední možný index budeme postupně označovat částice ve směrech k sousedním uzlům, počínaje směrem vpravo, a postupně jdoucími proti směru hodinových ručiček. Této konvence se budeme držet po zbytek práce.

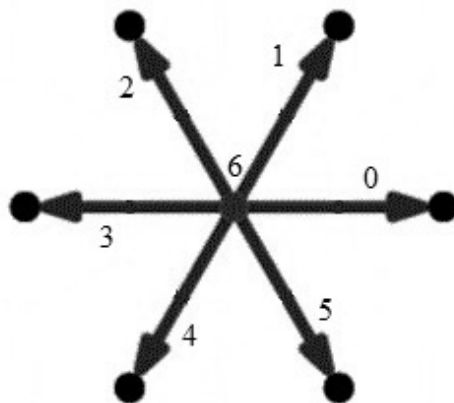
Dále označme vektory možných směrů pohybu částice jako v_{0-6} , kde indexy i odpovídají jednotlivým směrům, jak jsme si je označili.

2.1.3 Iterační krok - část propagace

Propagační část algoritmu spočívá v prostém přesunu částic po mřížce ve směru, který k této částici přísluší. Statická částice tedy zůstane na svém místě, všechny ostatní se přesunou do odpovídajícího sousedního uzlu. Nemůže se stát, aby částice skončila někde



Obrázek 1: Element mřížky D2Q4.



Obrázek 2: Element mřížky D2Q7.

na půl cesty mezi uzly mřížky. Rovněž nemůže nastat situace, aby se v některém uzlu někdy ocitly 2 částice pohybující se stejným směrem. Kdyby k tomu došlo, znamenalo by to, že došlo k chybě již při inicializaci mřížky na začátku simulace. Pokud tedy při inicializaci mřížky takovou situaci nevytvoříme, nemůže k ní v průběhu simulace nikdy dojít. Všechny hodnoty f_{0-6} tedy budou stále nabývat pouze hodnot 0 nebo 1.

2.1.4 Iterační krok - část kolize

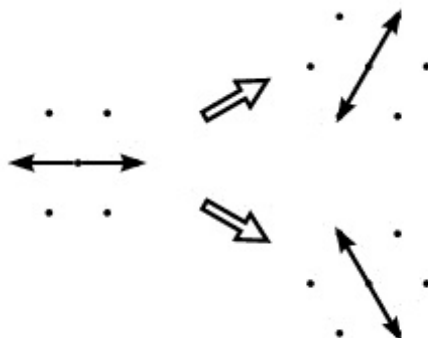
V kolizní části algoritmu je na každý uzel mřížky aplikována některá z předem definovaných transformací. Tato transformace znamená jednoduše řečeno "zamíchání" částic na daném uzlu. Aktuální sada částic vyskytující se na každém vrcholu se podle určitého předpisu zamění za jinou. Z matematického hlediska se jedná o nahrazení posloupnosti jedniček a nul, kterou tvoří hodnoty f_{0-6} , jinou posloupností. Toto nahrazení musí splňovat určité podmínky, které vyplývají z požadavků zákonů zachování hmoty a hybnosti. Množina kolizních pravidel je předem daná a neměnná množina předpisů pro transformaci rozložení částic v uzlech.

Při kolizní části algoritmu se tedy projdou stavy všech uzlů. Odpovídá-li stav daného uzlu vstupnímu stavu některého z transformačních pravidel, provede se na tomto uzlu právě tato transformace. Pokud je transformací s daným vstupním stavem více, vybere se vždy náhodně jedna z nich. Ukázky transformačních pravidel pro mřížku D2Q7 jsou na obrázcích 3, 4, 5 a 6. Na levé straně je vždy vstupní konfigurace částic v uzlu a na pravé pak možné varianty nahrazení. Šipka v i -tém směru znázorňuje přítomnost částice, tedy $f_i = 1$. V opačném případě platí $f_i = 0$. Je dobré zdůraznit, že ke kolizím dochází skutečně pouze v uzlech mřížky a nikde jinde. Vezmeme-li v úvahu například dvě částice na dvou sousedních uzlech, z nichž každá má směr přesunu právě do příslušného sousedního uzlu (pohybují se tedy proti sobě), nedochází k žádné kolizi "na půl cesty" mezi uzly. Částice se každá přesune na sousední uzel, jakoby prošly skrz sebe. Tato vlastnost platí i pro metodu Lattice Boltzmann.

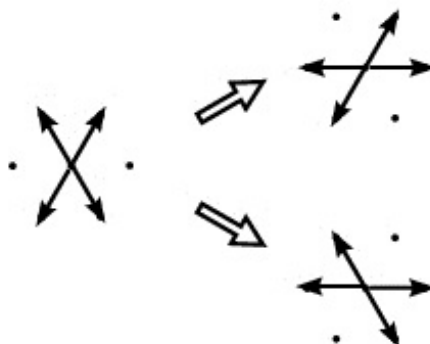
Jako důležitá otázka vyvstává počet a tvar transformačních pravidel. Jak již bylo řečeno, každé pravidlo musí dodržovat zákony zachování hmoty a hybnosti, čímž se množina možných variant značně zmenšuje. Analyticky i experimentálně bylo pak ukázáno, že s rostoucím počtem definovaných transformačních pravidel se zvyšuje maximální možné dosažitelné Reynoldsovo číslo. V této souvislosti poznamenejme, že v prvotních modelech Lattice Gas, pracujících s mřížkou D2Q4, nebyla zahrnuta statická, nepohybující se částice. Ta byla přidána až později, v modelech pracujících s mřížkou D2Q7 (hexagonální mřížka bez statické částice byla označována jako D2Q6), právě za účelem navýšení počtu možných transformačních pravidel pro kolizi částic. [5]

2.1.5 Hraniční uzly - překážky

Zvláštní formou uzlů mřížky jsou pevné uzly, které reprezentují reálnou pevnou překážku. Pro částice v těchto uzlech platí jiná pravidla než v ostatních uzlech. Dochází zde pouze k zachování hmoty, nikoliv hybnosti, jelikož žádná částice nemůže pokračovat v



Obrázek 3: Příklad kolizního pravidla pro LGA 1



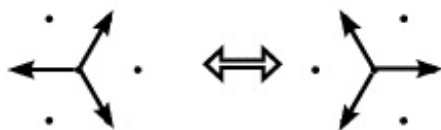
Obrázek 4: Příklad kolizního pravidla pro LGA 2

pohybu dále přes pevný uzel. Namísto toho se od uzlu nějakým způsobem odrazí. Nej-jednodušší variantou odrazu je tzv. pravidlo "bounce-back", tedy každá částice se odrazí zpět do směru, ze kterého do daného pevného uzlu přicestovala.

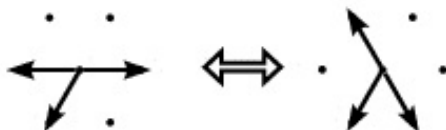
Uzlu představující pevné překážky implementují jednu z možných variant okrajových podmínek. O dalších variantách okrajových podmínek bude řeč až u metody Lattice Boltzmann.

2.1.6 Zákony zachování

V metodě LGA musí být v každém uzlu v rámci kolizní části jednoho iteračního kroku dodržovány 2 základní zákony zachování - zákon zachování hmoty a zákon zachování hybnosti. Tím je zajištěno, že v průběhu kolize se nemění množství částic v uzlu ani jejich celková hybnost.



Obrázek 5: Příklad kolizního pravidla pro LGA 3



Obrázek 6: Příklad kolizního pravidla pro LGA 4

Pro zachování hmotnosti musí tedy v rámci jednoho kolizního kroku, respektive před a po něm platit:

$$\sum_i f_i = konst. \quad (2.1)$$

a pro zachování hybnosti:

$$\sum_i f_i \mathbf{v}_i = konst. \quad (2.2)$$

Na obrázcích 3, 4, 5 a 6 je dobře vidět, že oba tyto zákony zachovávají. Počet částic je vždy stejný a celková hybnost (respektive rychlost, vzhledem k tomu, že všechny částice mají stejnou jednotkovou hmotnost) také.

2.1.7 Odstranění šumu

Hodnoty makroskopických veličin na mřížce získáme jednoduše z těch mikroskopických. Hmotnost, respektive hustotu ρ (tyto dva pojmy jsou zaměnitelné, uvažujeme-li plošný objem jedné buňky mřížky, který je dále nedělitelný a pro všechny uzly stejný) získáme jako počet částic vyskytujících se na daném uzlu. Hybnost zase získáme jako součet hybností všech částic.

Počítat tyto údaje pouze na základě informací z jednoho uzlu má ovšem jednu nevýhodu. Vzhledem k malému počtu možných hodnot, jakých mohou tyto veličiny na jednom uzlu nabývat (je například pouze 8 možných hodnot pro celkovou hmotnost), dochází ve výsledných datech k šumu. Hodnoty hmotnosti a hybnosti se mohou během iterací neustále prudce měnit. V praxi se proto používá jemnější mřížka, a pro výpočet makroskopické hodnoty v jednom bodě oblasti se využívá většího počtu uzlů mřížky (například čtverec o $a \times a$ uzlech). Zajímá-li nás v takovém případě hustota, vydělíme

získanou hmotnost (počet částic) počtem uzlů, ze kterých byla tato hmotnost spočítána. Pro tento postup je třeba zjemnit mřížku, řekněme n krát, kde n představuje počet uzlů potřebných pro jednu makroskopickou buňku, což vede samozřejmě k prodloužení potřebného výpočetního času. Na druhou stranu tímto postupem ovšem do značné míry odstraníme z dat šum a získáme stabilnější výsledky.

2.2 Lattice Boltzmann

2.2.1 Úvod

Jak bylo zmíněno výše, jednou ze slabin metody LGA je datový šum způsobený diskrétními hodnotami, kterými je určen počet částic v uzlech mřížky. Tento nedostatek je pak nutné kompenzovat počítáním průměru přes větší počet uzlů. Odstranění šumu bylo jedním z hlavních důvodů vzniku metody LBM. Diskrétní popis počtu částic v uzlech je nahrazen reálným číslem, které může nabývat libovolné nezáporné reálné hodnoty. Této hodnotě se říká hodnota distribuční funkce v daném uzlu a v daném směru. Na počet částic v uzlech mřížky je nahlíženo ze statistického pohledu. Další výhodou této metody je například to, že na rozdíl od LGA v ní platí Galileiho princip relativity [1]. Metoda LBM je také díky reálným hodnotám distribučních funkcí lépe zpracovatelná běžným počítačovým hardwarem, který pracuje zpravidla v aritmetice s plovoucí řádovou čárkou.

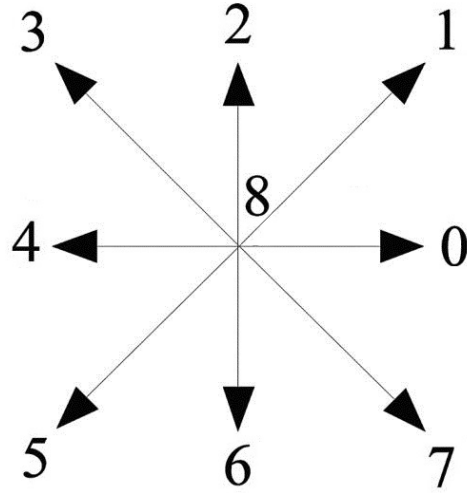
2.2.2 Distribuční funkce

Již v úvodu bylo řečeno, že distribuční funkce je vlastně zobecněním popisu počtu částic v uzlech mřížky na obor reálných čísel. Dříve zavedené proměnné f_{0-6} , které popisovaly počet částic v uzlu v daných směrech, a nabývaly každá hodnot 0 nebo 1, budeme tedy používat stále stejně, akorát nyní budou tyto proměnné moci nabývat libovolné nezáporné reálné hodnoty.

Tento přechod od diskrétních hodnot ke spojitým lze chápat také jako nahrazení většího počtu uzlů v metodě LGA jedním, který popisuje průměr mikroskopických hodnot na větší oblasti. Tím se ve výsledných simulačních datech sníží šum i za použití menšího počtu uzlů mřížky. Na druhou stranu je třeba pro spojitě hodnoty počtu částic vytvořit nový způsob výpočtu kolizí. Jednoduchá transformační pravidla používaná v LGA zde nelze uplatnit, protože se již nepracuje s diskrétními částicemi.

2.2.3 Mřížka

U metody LBM je možné použít stejnou mřížku jako u LGA, tedy hexagonální, nicméně v praxi se více používá mřížka čtvercová (D2Q9), ve které má každý uzel více sousedů (8 namísto 6 u hexagonální). Tuto mřížku budeme proto používat ve zbytku této práce. Hodnoty distribučních funkcí f tedy budeme indexovat až po index 8. Pořadí indexování bude opět proti směru hodinových ručiček, viz. obrázek 7. Konkrétní pořadí indexování směrů je čistě na volbě uživatele. V praxi se proto často setkáme s jiným indexováním. Pořadí zvolené v této práci je zvoleno jako přirozené ve smyslu kladného otáčení kolem středu a usnadňuje některé části implementace.



Obrázek 7: Element mřížky D2Q9

Jelikož budeme s mřížkou D2Q9 pracovat po zbytek práce, zadefinujeme si nyní všechny veličiny týkající se jejich uzlů. Hodnoty distribučních funkcí, tedy množství částic v jednotlivých směrech budeme značit f_{0-8} . Vektory přesunů označíme v_{0-8} . S ohledem na volbu pořadí indexace tedy platí například $v_0 = (1, 0)$, $v_5 = (-1, -1)$ nebo $v_8 = (0, 0)$. Celkovou hustotu v daném uzlu označíme řeckým symbolem ρ . Pro celkovou hustotu v každém uzlu tedy platí vztah:

$$\rho = \sum_i f_i \quad (2.3)$$

Celkovou hybnost na jednotku objemu v každém uzlu zapíšeme jako $u\rho$, kde u představuje celkovou rychlost v tomto uzlu. Platí vztah:

$$\rho u = \sum_i f_i v_i \quad (2.4)$$

Rychlost u získáme jednoduše vydělením celkové hybnosti hustotou:

$$u = \frac{1}{\rho} \sum_i f_i v_i \quad (2.5)$$

Důležitou vlastností mřížky je symetrie její základní jednotky podle středu, která je patrná z obrázku 7. Pro každý vektor přesunu v_i , kromě nulového vektoru v_8 , existuje jiný vektor přesunu v_j , který je k tomuto vektoru opačný, tedy $v_j = -v_i$. Z této vlastnosti plyne vztah:

$$\sum_i v_i = (0, 0) \quad (2.6)$$

2.2.4 Jednotky

Doposud jsme se nezabývali vazbami mezi parametry mřížky a reálnými rozměry řešené úlohy. Před řešením úlohy se nejdříve abstrahuje od veličin, které nejsou z hlediska simulace podstatné. Například řešení úlohy proudění zadaného nestlačitelnou formou Navier-Stokesových rovnic je závislé pouze na jednom parametru, kterým je Reynoldsovo číslo [3]. U metody LBM se fyzikální zadání úlohy (reprezentováno indexem p) vždy první převede do tzv. bezrozměrného systému (index d), který neobsahuje žádné fyzikální jednotky. Pro tento převod je třeba zvolit dva parametry, konkrétně charakteristickou délku oblasti l_0 (například některý z rozměrů překážky v proudění) a charakteristický čas t_0 . Jakákoliv časová hodnota t_p z fyzického systému se do toho bezrozměrného převede jednoduše jako:

$$t_d = \frac{t_p}{t_0} \quad (2.7)$$

a jakákoliv délková hodnota l_p jako:

$$l_d = \frac{l_p}{l_0} \quad (2.8)$$

Povšimněme si, že samotné charakteristické hodnoty t_0 a l_0 mají po převodu do bezrozměrného systému hodnotu 1.

Následně se tento systém diskretizuje, což znamená vytvoření mřížky na které bude probíhat simulace. Diskrétní systém je charakterizován dvěma parametry: δ_t a δ_x . Časový parametr δ_t určuje poměr mezi hodnotou charakteristického času $t_{0,d}$ v bezrozměrném systému (která se rovná 1) a počtem iteračních kroků potřebných k dosažení tohoto času - N_{iter} :

$$\delta_t = \frac{t_{0,d}}{N_{iter}} = \frac{1}{N_{iter}} \quad (2.9)$$

Hodnota δ_x určuje diskretizaci charakteristické délky oblasti. Vypočítá se jako podíl charakteristické délky v bezrozměrném systému $l_{0,d}$ a počtu uzlů potřebného k diskretizaci této délky:

$$\delta_x = \frac{l_{0,d}}{N} = \frac{1}{N} \quad (2.10)$$

Hodnoty všech veličin se pak mezi jednotlivými systémy převádí pomocí výše uvedených pravidel. Pro převod rychlosti mezi fyzikálním a bezrozměrným systémem tedy platí:

$$\mathbf{u}_p = \frac{l_0}{t_0} \quad (2.11)$$

Reynoldsovo číslo proudění je definováno jako [3]:

$$Re = \frac{l_0^2}{t_0 \nu} \quad (2.12)$$

kde ν je kinematická viskozita tekutiny. Vzhledem k tomu, že v bezrozměrném systému jsou hodnoty l_0 i t_0 reprezentovány hodnotou 1, platí pro viskozitu v tomto systému vztah:

$$\nu_d = \frac{1}{Re} \quad (2.13)$$

Dalším důležitým parametrem je rychlost zvuku mřížky. Tento parametr má označení c_s . Jedná se opět o bezrozměrnou hodnotu, která je určena tvarem mřížky. Pro mřížku D2Q9 platí [3]:

$$c_s^2 = \frac{1}{3} \quad (2.14)$$

Tato hodnota bylo zvolena proto, že pro mřížku D2Q9 je při této hodnotě splněna podmínka izotropie [8]. Porovnáním rychlosti proudění tekutiny právě s rychlostí zvuku vyjádříme rychlost proudění Machovým číslem M :

$$M = \frac{\|u\|}{c_s} \quad (2.15)$$

kde $\|u\|$ je Eukleidovská norma vektoru.

Podle Machova čísla proudění se rozlišuje, jedná-li se o proudění stlačitelné nebo nestlačitelné. Do hodnoty $M = 0.3$ lze s dostatečnou přesností považovat proudění za nestlačitelné. Pro vyšší hodnoty již nelze stlačitelnost zanedbávat.

2.2.5 Iterační krok - část propagace

Propagační část algoritmu je v podstatě stejná jako u metody LGA. Hodnoty distribuční funkce se po mřížce přesunou do nových uzlů ve směru příslušných vektorů přesunu:

$$f_i(\mathbf{x} + \delta_x \mathbf{v}_i, it + 1) := f_i(\mathbf{x}, it) \quad (2.16)$$

Hodnota f_i představuje, jak již bylo řečeno dříve, hodnotu distribuční funkce v i -tém směru, resp. ve směru \mathbf{v}_i . Vektor \mathbf{x} představuje konkrétní uzel mřížky, hodnota it pak index aktuálního iteračního kroku.

2.2.6 Iterační krok - část kolize

Jak bylo zmíněno dříve, změnou popisu množství částic v uzlech mřížky (přechodem od diskrétního počtu k distribuční funkci) je nutné změnit i pravidla pro kolizní část iteračního kroku.

U metody LBM se pro kolizní část algoritmu používá Bratnagar-Gross-Krookův operátor, který má podobu [1], [4]:

$$\Omega_i = \frac{1}{\tau}(f_i^{eq} - f_i) \quad (2.17)$$

Ω_i reprezentuje hodnotu kolizního operátoru pro i -tý vektor přesunu po mřížce. f_i je aktuální hodnota distribuční funkce v daném uzlu a i -tém směru, f_i^{eq} je hodnota rovnovážného stavu distribuční funkce tomtéž směru. O této hodnotě bude ještě řeč později. Nyní ji budeme chápat spíše intuitivně jako hodnotu distribuční funkce pro daný směr v daném uzlu v rovnovážném (ustáleném) stavu tekutiny. τ představuje relaxační parametr, který je kladný a je určen předem pro celou simulaci.

Kolizní část iteračního kroku spočívá v přičtení hodnoty kolizního operátoru k hodnotám distribučních funkcí ve všech uzlech a směrech. Tedy:

$$f_i(\mathbf{x}, it) := f_i(\mathbf{x}, it) + \Omega_i \quad (2.18)$$

Dosadíme-li do rovnice přímo předpis pro kolizní operátor, dostaneme:

$$f_i(\mathbf{x}, it) := f_i(\mathbf{x}, it) + \frac{1}{\tau}(f_i^{eq}(\mathbf{x}, it) - f_i(\mathbf{x}, it)) \quad (2.19)$$

Na poslední rovnici lze dobře ukázat význam relaxačního parametru τ . Čím vyšší bude hodnota τ , tím nižší bude hodnota výrazu $\frac{1}{\tau}$, a hodnoty f_i se budou v kolizní části pouze nepatrně přibližovat hodnotám rovnovážného stavu. A naopak, s klesajícím τ se budou hodnoty f_i přibližovat hodnotám f_i^{eq} rychleji. Pro možné hodnoty τ je stanoveno omezení na interval $(0.5, \infty)$ [1]. Jelikož tento parametr představuje rychlost přibližování se hodnot distribuční funkce k rovnovážnému stavu, je pochopitelné, že je spjatý s viskozitou tekutiny. Konkrétně s kinematickou viskozitou ν , vztahem:

$$\nu = (\tau - \frac{1}{2})c_s^2 \quad (2.20)$$

Vyjádříme-li z předchozí rovnice τ , dostaneme:

$$\tau = \frac{\nu}{c_s^2} + \frac{1}{2} \quad (2.21)$$

Z této rovnice je patrné, že relaxační parametr τ je přímo úměrný viskozitě, nepřímo úměrný délce časového kroku a druhé mocnině rychlosti zvuku. Jelikož je rychlost zvuku pro mřížku D2Q9 dána vztahem (2.14), zůstane pouze závislost na viskozitě:

$$\tau = 3\nu + \frac{1}{2} \quad (2.22)$$

2.2.7 Rovnovážený stav distribuční funkce

V předchozí sekci, týkající se kolizní části iteračního kroku, zůstala nedefinovaná hodnota rovnovážného stavu distribuční funkce f^{eq} . U metody LBM je tato hodnota definovaná pro mřížku D2Q9 takto [2], [4]:

$$f_i^{eq} = \rho w_i \left[1 + 3\mathbf{u}v_i + \frac{9}{2}(\mathbf{u}v_i)^2 - \frac{3}{2}\mathbf{u}u \right] \quad (2.23)$$

ρ je celková hustota v daném uzlu, \mathbf{u} je celková makroskopická rychlost v tomto uzlu a \mathbf{v}_i je i -tý směr přesunu. Všechny tyto veličiny již byly popsány dříve. Zápisy $\mathbf{u}\mathbf{v}_i$ a $\mathbf{u}\mathbf{u}$ představují skalární součin vektorů.

Novým parametrem je zde w_i . Tato hodnota určuje váhu přesunu částic v daném směru, tedy, jakým dílem se na celkovém pohybu částic v rovnovážném stavu podílí právě i -tý směr přesunu. Musí tedy přirozeně platit:

$$\sum_i w_i = 1 \quad (2.24)$$

Hodnoty těchto parametrů jsou pro mřížku D2Q9 stanoveny takto [1], [4]:

$$w_i = \begin{cases} \frac{1}{9} & i = 0, 2, 4, 6 \\ \frac{1}{36} & i = 1, 3, 5, 7 \\ \frac{4}{9} & i = 8 \end{cases} \quad (2.25)$$

Všimněme si, že jsou hodnoty w_i voleny symetricky, tedy že pro vzájemně opačné vektory nabývají stejných hodnot. V dříve uvedené rovnosti (2.6) tak můžeme každý vektor \mathbf{v}_i vynásobit příslušnou váhou w_i , aniž bychom změnili výsledek. Platí proto:

$$\sum_i w_i \mathbf{v}_i = (0, 0) \quad (2.26)$$

Zavedením rovnovážné distribuční funkce lze jakoukoliv hodnotu distribuční funkce v libovolném uzlu rozdělit na dvě části - právě hodnotu rovnovážné distribuční funkce a její doplněk, který se nazývá nerovnovážná distribuční funkce a označuje se jako f_i^{neq} . Hodnotu distribuční funkce lze tedy zapsat jako:

$$f_i = f_i^{eq} + f_i^{neq} \quad (2.27)$$

2.2.8 Zákony zachování hmoty a hybnosti

Jak jsme se již zmínili dříve, důležitou vlastností metody LBM je dodržení zákonů zachování hmoty a hybnosti při kolizní části iteračního kroku, stejně jako tomu bylo u metody LGA. Zatímco u metody LGA bylo dodržení těchto zákonů jasně patrné z pouhého pohledu na kolizní pravidla, u metody LBM to již nemusí být tak zřejmé. Pojďme se tedy přesvědčit, že jsou tyto zákony skutečně dodrženy. Začneme zákonem zachování hmoty, který lze zapsat vztahem:

$$\sum_i f_i = \sum_i (f_i + \Omega_i) \quad (2.28)$$

Za hodnotu kolizního operátoru Ω_i můžeme dosadit podle vztahu (2.17):

$$\sum_i f_i = \sum_i \left[f_i + \frac{1}{\tau} (f_i^{eq} - f_i) \right]$$

Následuje série ekvivalentních úprav:

$$\begin{aligned}
\sum_i f_i &= \sum_i \left[f_i + \frac{1}{\tau} (f_i^{eq} - f_i) \right] & / - \sum_i f_i \\
0 &= \sum_i \left[\frac{1}{\tau} (f_i^{eq} - f_i) \right] & / \cdot \tau \\
0 &= \sum_i (f_i^{eq} - f_i) & / + \sum_i f_i \\
\sum_i f_i &= \sum_i f_i^{eq}
\end{aligned}$$

Sumu na levé straně můžeme nahradit hustotou, podle vztahu (2.3). Na pravé straně pak rozepíšeme hodnotu f_i^{eq} podle vztahu (2.23):

$$\begin{aligned}
\rho &= \sum_i \left(\rho w_i \left[1 + 3\mathbf{u}\mathbf{v}_i + \frac{9}{2}(\mathbf{u}\mathbf{v}_i)^2 - \frac{3}{2}\mathbf{u}\mathbf{u} \right] \right) \\
\rho &= \rho \sum_i w_i + \rho \sum_i \left[3w_i\mathbf{u}\mathbf{v}_i + \frac{9}{2}w_i(\mathbf{u}\mathbf{v}_i)^2 - \frac{3}{2}w_i\mathbf{u}\mathbf{u} \right]
\end{aligned}$$

Pro první sumu na pravé straně můžeme uplatnit vztah (2.24):

$$\begin{aligned}
\rho &= \rho + \rho \sum_i \left[3w_i\mathbf{u}\mathbf{v}_i + \frac{9}{2}w_i(\mathbf{u}\mathbf{v}_i)^2 - \frac{3}{2}w_i\mathbf{u}\mathbf{u} \right] & / - \rho \\
0 &= \rho \sum_i \left[3w_i\mathbf{u}\mathbf{v}_i + \frac{9}{2}w_i(\mathbf{u}\mathbf{v}_i)^2 - \frac{3}{2}w_i\mathbf{u}\mathbf{u} \right]
\end{aligned}$$

Je-li hodnota ρ rovna 0, je tímto důkaz hotov. Dále tedy předpokládejme $\rho \neq 0$. Obě strany rovnosti pak můžeme hustotou vydělit. Zároveň pro větší přehlednost přehodíme strany rovnosti:

$$\begin{aligned}
\sum_i \left[3w_i\mathbf{u}\mathbf{v}_i + \frac{9}{2}w_i(\mathbf{u}\mathbf{v}_i)^2 - \frac{3}{2}w_i\mathbf{u}\mathbf{u} \right] &= 0 \\
3\mathbf{u} \sum_i w_i\mathbf{v}_i + \frac{9}{2} \sum_i w_i(\mathbf{u}\mathbf{v}_i)^2 - \frac{3}{2}\mathbf{u}\mathbf{u} \sum_i w_i &= 0
\end{aligned}$$

Při posledním kroku jsme pro vytknutí rychlosti \mathbf{u} z první sumy využili distributivity skalárního součinu. Podle vztahu (2.26) je výsledná suma rovna 0. Poslední sumu

na levé straně rovnosti pak můžeme upravit podle vztahu (2.24). Rovnost se nám tedy zjednoduší na:

$$\begin{aligned}
 \frac{9}{2} \sum_i w_i (\mathbf{u} \mathbf{v}_i)^2 - \frac{3}{2} \mathbf{u} \mathbf{u} &= 0 & / \cdot \frac{2}{9} \\
 \sum_i w_i (\mathbf{u} \mathbf{v}_i)^2 - \frac{1}{3} \mathbf{u} \mathbf{u} &= 0 & / + \frac{1}{3} \mathbf{u} \mathbf{u} \\
 \sum_i w_i (\mathbf{u} \mathbf{v}_i)^2 &= \frac{1}{3} \mathbf{u} \mathbf{u} \\
 \sum_i w_i (\mathbf{u} \mathbf{v}_i)^2 &= \frac{1}{3} \mathbf{u} \mathbf{u}
 \end{aligned}$$

Při poslední úpravě jsme opět využili vztah (2.24). Na závěr rozepíšeme sumu na levé straně na jednotlivé sčítance. Vektor rychlosti \mathbf{u} rozepíšeme na jednotlivé složky, tedy $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$:

$$\begin{aligned}
 &\frac{4}{9}((u_x, u_y)(0, 0))^2 + \\
 &\frac{1}{9}((u_x, u_y)(1, 0))^2 + \frac{1}{36}((u_x, u_y)(1, 1))^2 + \\
 &\frac{1}{9}((u_x, u_y)(0, 1))^2 + \frac{1}{36}((u_x, u_y)(-1, 1))^2 + \\
 &\frac{1}{9}((u_x, u_y)(-1, 0))^2 + \frac{1}{36}((u_x, u_y)(-1, -1))^2 + \\
 &\frac{1}{9}((u_x, u_y)(0, -1))^2 + \frac{1}{36}((u_x, u_y)(1, -1))^2 &= \frac{1}{3} \mathbf{u} \mathbf{u}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\frac{4}{9}0^2 + \\
 &\frac{1}{9}u_x^2 + \frac{1}{36}(u_x + u_y)^2 + \\
 &\frac{1}{9}u_y^2 + \frac{1}{36}(-u_x + u_y)^2 + \\
 &\frac{1}{9}(-u_x)^2 + \frac{1}{36}(-u_x - u_y)^2 + \\
 &\frac{1}{9}(-u_y)^2 + \frac{1}{36}(u_x - u_y)^2 &= \frac{1}{3} \mathbf{u} \mathbf{u}
 \end{aligned}$$

Po sečtení všech členů dostaneme:

$$\begin{aligned} \frac{1}{36}(12u_x^2 + 12u_y^2) &= \frac{1}{3}\mathbf{uu} & / \cdot \frac{36}{12} \\ u_x^2 + u_y^2 &= \mathbf{uu} \end{aligned}$$

Je snadné si uvědomit, že obě strany poslední rovnosti představují totéž. Všechny výše uvedené úpravy byly ekvivalentní. Z platnosti poslední rovnosti tedy plyne i platnost rovnosti (2.28), ze které jsme vycházeli. Tím je důkaz dokončen. Kolizní krok definovaný předpisem (2.19) společně s definicí rovnovážné distribuční funkce (2.23) dodržuje zákon zachování hmoty pro libovolný relaxační parametr τ .

Podobně budeme postupovat i při důkazu zákona zachování hybnosti. Ten lze vyjádřit rovností:

$$\sum_i f_i \mathbf{v}_i = \sum_i [(f_i + \Omega_i) \mathbf{v}_i] \quad (2.29)$$

Za Ω_i opět dosadíme podle vztahu (2.17):

$$\begin{aligned} \sum_i f_i \mathbf{v}_i &= \sum_i \left(\left[f_i + \frac{1}{\tau}(f_i^{eq} - f_i) \right] \mathbf{v}_i \right) \\ \sum_i f_i \mathbf{v}_i &= \sum_i f_i \mathbf{v}_i + \frac{1}{\tau} \sum_i (f_i^{eq} - f_i) \mathbf{v}_i & / - \sum_i f_i \mathbf{v}_i \\ 0 &= \frac{1}{\tau} \sum_i (f_i^{eq} - f_i) \mathbf{v}_i & / \cdot \tau \\ 0 &= \sum_i f_i^{eq} \mathbf{v}_i - \sum_i f_i \mathbf{v}_i & / + \sum_i f_i \mathbf{v}_i \\ \sum_i f_i \mathbf{v}_i &= \sum_i f_i^{eq} \mathbf{v}_i \end{aligned}$$

Za f_i^{eq} opět dosadíme podle vztahu (2.23):

$$\begin{aligned} \sum_i f_i \mathbf{v}_i &= \sum_i \rho w_i \left[1 + 3\mathbf{uv}_i + \frac{9}{2}(\mathbf{uv}_i)^2 - \frac{3}{2}\mathbf{uu} \right] \mathbf{v}_i \\ \sum_i f_i \mathbf{v}_i &= \rho \sum_i w_i \mathbf{v}_i + 3\rho \sum_i w_i (\mathbf{uv}_i) \mathbf{v}_i + \frac{9}{2}\rho \sum_i w_i (\mathbf{uv}_i)^2 \mathbf{v}_i - \frac{3}{2}\rho \mathbf{uu} \sum_i w_i \mathbf{v}_i \end{aligned}$$

První a poslední člen na pravé straně rovnosti jsou podle vztahu (2.26) rovny nulovému vektoru. Dostáváme tedy:

$$\sum_i f_i \mathbf{v}_i = 3\rho \sum_i w_i(\mathbf{u}\mathbf{v}_i)\mathbf{v}_i + \frac{9}{2}\rho \sum_i w_i(\mathbf{u}\mathbf{v}_i)^2\mathbf{v}_i$$

Nyní se zamysleme nad poslední sumou pravé strany poslední rovnosti. Pro index $i = 8$ bude výsledkem nulový vektor. Hodnoty ovlivňující výsledek sumy dostaneme tedy pouze pro indexy $i = 0..7$. V sekci zabývající se stavbou mřížky jsme ukázali, že element mřížky je symetrický podle středu a každému vektoru \mathbf{v}_i existuje opačný vektor $\mathbf{v}_j = -\mathbf{v}_i$. Výjimkou je právě akorát vektor \mathbf{v}_8 , který jsme již z úvah vyloučili. Uvažujme tedy jednu takovou dvojici vektorů \mathbf{v}_i a \mathbf{v}_j , pro kterou platí $\mathbf{v}_j = -\mathbf{v}_i$. Zřejmě platí $(\mathbf{u}\mathbf{v}_i)^2 = (\mathbf{u}\mathbf{v}_j)^2$. Zároveň platí $w_i = w_j$. Výrazy $w_i(\mathbf{u}\mathbf{v}_i)^2\mathbf{v}_i$ a $w_j(\mathbf{u}\mathbf{v}_j)^2\mathbf{v}_j$ tedy představují dva vektory stejné velikosti a opačného směru. Jejich součtem je tedy nulový vektor. Poslední suma není ničím jiným než součtem takovýchto dvojic vektorů a jednoho samostatného nulového vektoru. Její výsledek je proto rovněž roven nulovému vektoru.

Rovnost se tedy zjednoduší na:

$$\sum_i f_i \mathbf{v}_i = 3\rho \sum_i w_i(\mathbf{u}\mathbf{v}_i)\mathbf{v}_i$$

Levou stranu nyní můžeme upravit podle vztahu (2.4). Dále budeme opět předpokládat nenulovou hustotu. Dostaneme tedy:

$$\begin{aligned} \rho \mathbf{u} &= 3\rho \sum_i w_i(\mathbf{u}\mathbf{v}_i)\mathbf{v}_i && / \cdot \frac{1}{3\rho} \\ \frac{1}{3} \mathbf{u} &= \sum_i w_i(\mathbf{u}\mathbf{v}_i)\mathbf{v}_i \end{aligned}$$

Na pravé straně nyní opět rozepíšeme vektor \mathbf{u} jako (u_x, u_y) a za vektory \mathbf{v}_i a w_i dosadíme příslušné hodnoty:

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\mathbf{u} = & \frac{4}{9} [(u_x, u_y)(0, 0)] (0, 0) + \\ & \frac{1}{9} [(u_x, u_y)(1, 0)] (1, 0) + \frac{1}{36} [(u_x, u_y)(1, 1)] (1, 1) + \\ & \frac{1}{9} [(u_x, u_y)(0, 1)] (0, 1) + \frac{1}{36} [(u_x, u_y)(-1, 1)] (-1, 1) + \\ & \frac{1}{9} [(u_x, u_y)(-1, 0)] (-1, 0) + \frac{1}{36} [(u_x, u_y)(-1, -1)] (-1, -1) + \\ & \frac{1}{9} [(u_x, u_y)(0, -1)] (0, -1) + \frac{1}{36} [(u_x, u_y)(1, -1)] (1, -1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\mathbf{u} = & \frac{4}{9}(0, 0) + \\ & \frac{1}{9}(u_x, 0) + \frac{1}{36}(u_x + u_y, u_x + u_y) + \\ & \frac{1}{9}(0, u_y) + \frac{1}{36}(u_x - u_y, -u_x + u_y) + \\ & \frac{1}{9}(u_x, 0) + \frac{1}{36}(u_x + u_y, u_x + u_y) + \\ & \frac{1}{9}(0, u_y) + \frac{1}{36}(u_x - u_y, -u_x + u_y)\end{aligned}$$

Po sečtení všech vektorů dostaneme:

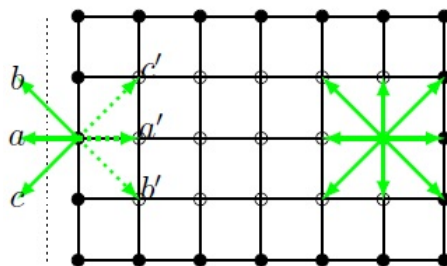
$$\frac{1}{3}\mathbf{u} = \frac{12}{36}(u_x, u_y)$$

Poslední rovnost zcela jistě platí. Jelikož byly použity pouze ekvivalentní úpravy, platí tudíž i výchozí rovnost (2.29). Tím je důkaz dokončen.

Dokázali jsme tedy platnost jak zákona zachování, hmoty tak zákona zachování hybnosti.

2.2.9 Okrajové podmínky

Okrajové podmínky určitým způsobem popisují stav tekutiny na hranici výpočetní oblasti. Tyto podmínky si vynucují návaznost námi získaného řešení na okolní stav tekutiny, který není předmětem výpočtu. Na implementaci okrajových podmínek je závislá přesnost i stabilita výpočtu. Proto patří téma okrajových podmínek mezi intenzivně zkoumané části metody LBM.



Obrázek 8: Pravidlo "bounce-back".

Z makroskopického hlediska existují tři typy lineárních okrajových podmínek - Dirichletova, Neumannova a Robinova. Uvažujeme uzavřenou oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, bod x ležící na její hranici, veličinu y zkoumanou na této oblasti a normálový vektor k hranici \mathbf{n} . Dále uvažujeme libovolná nenulová reálná čísla a, b a libovolné reálné číslo α .

Dirichletova okrajová podmínka v bodě x je definována jako:

$$y(x) = \alpha \quad (2.30)$$

Neumannova jako:

$$\frac{\partial y}{\partial \mathbf{n}} = \alpha \quad (2.31)$$

a Robinova jako:

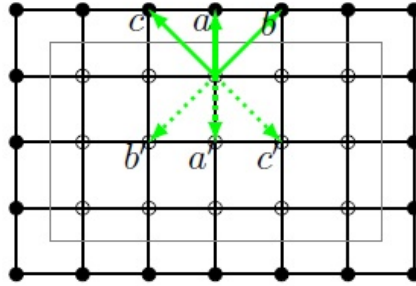
$$ay(x) + b \frac{\partial y}{\partial \mathbf{n}} = \alpha \quad (2.32)$$

V metodách jako FVM nebo FEM se tyto předpisy okrajových podmínek přímo zakomponují do výsledné soustavy lineárních rovnic. U metody LBM je nutné z těchto rovnic odvodit rovnice pro hodnoty distribučních funkcí v odpovídajících hraničních uzlech mřížky.

Za dobu vývoje metody LBM bylo navrženo mnoho implementací okrajových podmínek, v závislosti na tvaru a povaze hranice výpočetní oblasti.

2.2.9.1 Pravidlo "bounce-back" Jednou z nejjednodušších implementací okrajové podmínky je pravidlo zpětného odrazu, anglicky "bounce-back". Jedná se v podstatě o obdobu pravidla pro odraz u metody LGA. Toto pravidlo se používá pro reprezentaci pevných překážek. Jak je patrné již z názvu, neznámé hodnoty distribučních funkcí, tedy těch směřujících z překážky do vnitřních uzlů mřížky, získáme prostým odrazem distribučních funkcí směřujících dovnitř překážky. Vzhledem ke zvolenému pořadí indexování směrů lze tento odraz zapsat jednoduše pomocí modulární aritmetiky:

$$f_j^* = f_i \quad (2.33)$$



Obrázek 9: Pravidlo "halfway bounce-back".

kde f_j^* představuje hodnotu distribuční funkce v j -tém směru po provedení kolizního kroku, přičemž a je pevně dáno pro každé i v intervalu od 0 do 7:

$$j = (i + 4) \mod 8 \quad (2.34)$$

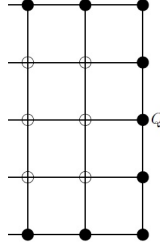
Na distribuční funkci f_8 není třeba pravidlo "bounce-back" používat, jelikož je její vektor přesunu nulový.

Aplikací pravidla "bounce-back" tedy v průběhu kolizního kroku změni každá z distribučních funkcí svůj směr přesunu na opačný, čímž vždy získáme všechny neznámé hodnoty distribučních funkcí cestujících z pevné překážky dovnitř simulační oblasti. Ukázka pravidla "bounce-back" je na obrázku 8. Neznámé hodnoty distribučních funkcí a' , b' a c' , nacházející se v hraničním uzlu mřížky (plná tečka), získáme odrazem distribučních funkcí a , b a c .

Pravidlo "bounce-back" je široce používáno pro svou jednoduchost na implementaci a univerzálnost. S jeho pomocí lze implementovat pevné nehybné překážky libovolného tvaru. Jeho nevýhodou je ovšem fakt, že dosahuje pouze prvního řádu prostorové přesnosti [1]. Použití tohoto pravidla má tedy za následek snížení přesnosti výpočtu z druhého řádu, které dosahuje metoda LBM, na přesnost prvního řádu [1].

Nevýhoda ztráty přesnosti odstraňuje modifikace metody "bounce-back", tzv. metoda "halfway bounce-back" [1]. Tato metoda neuvažuje překážku na místě hraničních uzlů mřížky, ale v polovině vzdálenosti mezi vnitřními a hraničními uzly. Díky tomu dochází k odrazu distribučních funkcí směřujících k překážce již ve vnitřních uzlech mřížky, které hraničním uzlům předcházejí. Odraz tímto způsobem zabere pouze jeden iterační krok, na rozdíl od originální metody "bounce-back", kde zabere kroky dva. Hodnota distribuční funkce se na místo cesty z vnitřního uzlu do hraničního, následného odrazu a návratu odrazí přímo ve vnitřním uzlu. Ukazuje se, že tato modifikace zachovává přesnost druhého řádu metody LBM. Ukázka této metody je na obrázku 9. Hodnoty a' , b' a c' jsou opět získány odrazem hodnot a , b a c , ale k odrazu dochází již ve vnitřním uzlu (prázdná tečka).

2.2.9.2 Zou-He Metoda "bounce-back" a její modifikace reprezentují pevné překážky, a jsou implementovány na uzlech, které nejsou součástí tekutiny (tzv. suché uzly). Jiný



Obrázek 10: Hraniční uzel mřížky D2Q9.

přístup je třeba zvolit v uzlech, které jsou na hranici výpočetní oblasti, ale jsou stále součástí tekutiny. Taková část hranice představuje stav tekutiny na okraji výpočetní oblasti. Tento stav není předmětem výpočtu, ale je určen zadáním problému.

Zpravidla se jedná o předpis definující hodnotu tlaku nebo rychlosti. Jedná se tedy o implementaci Dirichletovy okrajové podmínky. Zde poznamenejme, že v metodě LBM jsou tlak a hustota pevně svázány rovnicí [4]:

$$p = \rho c_s^2 \quad (2.35)$$

Jednou z implementací těchto okrajových podmínek je přístup navržený pány Zou a He v jejich práci z roku 1997 [9], a je proto pojmenován po nich. Uvažujme tedy okrajový uzel mřížky Q podle obrázku 10, který bude implementovat okrajovou podmínku přístupem Zou-He. V tomto uzlu jsou známé hodnoty distribučních funkcí f_0, f_1, f_2, f_6, f_7 a f_8 , jelikož tyto distribuční funkce pocházejí z uzlů mřížky. Neznámé jsou hodnoty f_3, f_4 a f_5 , poněvadž do mřížky přicházejí zvenku, a bude je tedy třeba určit.

Vyjdeme z předpisů pro celkovou hmotnost (2.3) a hybnost (2.4). Rychlost si následně rozdělíme na horizontální a vertikální složku - u_x a u_y . Pro odpovídající složky hybností pak platí vztahy:

$$\rho u_x = f_0 + f_1 - f_3 - f_4 - f_5 + f_7 \quad (2.36)$$

$$\rho u_y = f_1 + f_2 + f_3 - f_5 - f_6 - f_7 \quad (2.37)$$

Nyní si všimněme, že sečtením ρ a ρu_x získáme rovnici obsahující pro uzel Q pouze hodnoty známých distribučních funkcí:

$$\begin{aligned} \rho + \rho u_x &= f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7 + f_8 + \\ &\quad f_0 + f_1 - f_3 - f_4 - f_5 + f_7 \\ \rho + \rho u_x &= 2(f_0 + f_1 + f_7) + f_2 + f_6 + f_8 \end{aligned} \quad (2.38)$$

Z této rovnice snadno vyjádříme hustotu:

$$\rho = \left(\frac{1}{1 + u_x} \right) [2(f_0 + f_1 + f_7) + f_2 + f_6 + f_8] \quad (2.39)$$

nebo rychlost u_x :

$$u_x = -1 + \frac{1}{\rho} [2(f_0 + f_1 + f_7) + f_2 + f_6 + f_8] \quad (2.40)$$

Z těchto rovnic je vidět, že lze jednoduše převést zadanou hodnotu hustoty v okrajovém uzlu na hodnotu složky rychlosti, která je kolmá k hranici výpočetní oblasti. Stejně tak lze převést tuto rychlost na hustotu. K obojímu nám stačí pouze známé hodnoty distribučních funkcí. Čtenář si domyslí, že obdobné rovnice lze sestavit na libovolném hraničním uzlu.

Je-li tedy jako okrajová podmínka zadaná rychlost $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$, ze složky kolmé na překážku lze dopočítat hustotu, ze známých hodnot distribuční funkce. Je-li jako okrajová podmínka zadán tlak, respektive hustota, je možné spočítat složku rychlosti kolmou k hranici. Je však nutné navíc specifikovat druhou, tedy tečnou složku rychlosti, kterou není možné ze známých distribučních funkcí v uzlu zjistit.

Dalším krokem je určení neznámé hodnoty distribučních funkcí, v našem případě f_3 , f_4 a f_5 . Podívejme se nyní na celý problém z hlediska řešení soustavy rovnic. Neznámé hodnoty jsou zde 3 hodnoty distribučních funkcí f_3 , f_4 a f_5 , a dále jedna makroskopická veličina, kterou je buď ρ nebo u_x . V každém případě máme 4 neznámé. Zároveň máme pouze 3 rovnice - (2.3), (2.36) a (2.37), z nichž některé jsme již využili při určování neznámé makroskopické veličiny. Je tedy třeba uvést ještě jednu rovnici, aby byl problém jednoznačně řešitelný. U metody Zou-He se jako tato doplňující rovnice volí [1], [9]

$$f_0 - f_0^{eq} = f_4 - f_4^{eq} \quad (2.41)$$

Připomeňme zde, že hodnotu distribuční funkce je možné rozdělit na rovnovážnou a nerovnovážnou část (2.27). Rovnice (2.41) tedy v podstatě představuje pravidlo "bounce-back", které se však aplikuje pouze na nerovnovážnou část distribuční funkce. Toto pravidlo se týká směru kolmého k hranici mřížky. Tato rovnice nám spolu s rovnicemi (2.3), (2.36) a (2.37) umožňuje jednoznačně určit hodnoty neznámých distribučních funkcí f_3 , f_4 a f_5 .

Jako první vypočítáme hodnotu výrazu $f_4^{eq} - f_0^{eq}$ dosazením vzorce pro výpočet rovnovážné distribuční funkce:

$$\begin{aligned} f_4^{eq} - f_0^{eq} &= \rho w_4 \left[1 + 3\mathbf{u}\mathbf{v}_4 + \frac{9}{2}(\mathbf{u}\mathbf{v}_4)^2 - \frac{3}{2}\mathbf{u}\mathbf{u} \right] \\ &\quad - \left(\rho w_0 \left[1 + 3\mathbf{u}\mathbf{v}_0 + \frac{9}{2}(\mathbf{u}\mathbf{v}_0)^2 - \frac{3}{2}\mathbf{u}\mathbf{u} \right] \right) \\ &= \frac{1}{9}\rho + \frac{1}{3}\rho(-u_x) + \frac{1}{2}\rho(-u_x)^2 - \frac{1}{6}\rho\mathbf{u}\mathbf{u} \\ &\quad - \left(\frac{1}{9}\rho + \frac{1}{3}\rho(u_x) + \frac{1}{2}\rho(u_x)^2 - \frac{1}{6}\rho\mathbf{u}\mathbf{u} \right) \\ &= -\frac{2}{3}\rho u_x \end{aligned}$$

Rovnici (2.41) lze tedy přepsat ve tvaru:

$$\begin{aligned} f_4 &= f_0 - f_0^{eq} + f_4^{eq} \\ &= f_0 - \frac{2}{3}\rho u_x \end{aligned} \quad (2.42)$$

čímž jsme určili jednu z neznámých hodnot distribučních funkcí. Zbývá určit hodnoty f_3 a f_5 . Nejprve si z rovnice (2.37) vyjádříme hodnotu f_5 :

$$f_5 = f_1 + f_2 + f_3 - f_6 - f_7 - \rho u_y \quad (2.43)$$

Následně budeme pracovat s rovnicí (2.36):

$$\rho u_x = f_0 + f_1 - f_3 - f_4 - f_5 + f_7 \quad (2.44)$$

Za hodnoty f_4 a f_5 dosadíme dříve odvozené vztahy:

$$\begin{aligned} \rho u_x &= f_0 + f_1 - f_3 - \left(f_0 - \frac{2}{3}\rho u_x \right) - (f_1 + f_2 + f_3 - f_6 - f_7 - \rho u_y) + f_7 \\ &= -f_2 - 2f_3 + f_6 + 2f_7 + \frac{2}{3}\rho u_x + \rho u_y \\ \frac{1}{3}\rho u_x &= -f_2 - 2f_3 + f_6 + 2f_7 + \rho u_y \end{aligned} \quad (2.45)$$

Z poslední rovnice můžeme vyjádřit jedinou neznámou hodnotu - f_3 :

$$f_3 = f_7 + \frac{1}{2}(f_6 - f_2) - \frac{1}{6}\rho u_x + \frac{1}{2}\rho u_y \quad (2.46)$$

Obdobným postupem vyjádříme hodnotu f_5 :

$$f_5 = f_1 - \frac{1}{2}(f_6 - f_2) - \frac{1}{6}\rho u_x - \frac{1}{2}\rho u_y \quad (2.47)$$

Tím jsme určili všechny neznámé hodnoty distribučních funkcí v hraničním uzlu. Vy-
cházení jsme přitom z rovnic pro zachování hmoty (2.3), hybnosti (2.36) a (2.37) a doplň-
kové rovnice (2.41). Výše uvedený postup lze s drobnými úpravami použít pro libovolný
okrajový uzel na rovné, tedy vodorovné nebo svislé hranici. Zvláštní pozornost je třeba
věnovat rohovým uzlům, kde je počet neznámých distribučních funkcí roven pěti na-
místo tří. Na určení takového počtu neznámých nemáme dostatek rovnic. Jedním z mož-
ných řešení je využití interpolace nebo extrapolace hodnot ze sousedních uzlů. To lze
provést buď na makroskopické úrovni, tedy interpolací nebo extrapolací hustoty nebo
rychlosti, nebo na rovnou na mikroskopické úrovni, interpolací nebo extrapolací hodnot
distribučních funkcí na sousedních uzlech [1].

3 Implementace

V předchozí kapitole jsme se věnovali teoretickému základu metody LBM. Byly popsány základní vztahy a principy, které tato metoda používá. S využitím těchto poznatků bylo implementováno několik simulací proudění nestlačitelné kapaliny ve 2D. Konkrétně obtékání válce pro dvě různá Reynoldsova čísla (50 a 200) a proudění v kavitě.

Implementace byla realizována v programovacím jazyce C++ ve dvou variantách. Jednou s použitím matematické knihovny PETSc v systému Linux, a podruhé s využitím knihovny pro maticové výpočty Eigen v systému Windows. Obě varianty implementace lze nalézt na přiloženém CD. Ukázky kódu uvedené v této práci pochází z varianty využívající knihovnu Eigen, která je o něco přehlednější. Obecné schéma průběhu výpočtu lze vidět na obrázku 11.

```

DirectionCol << 1, 1, 0, -1, -1, -1, 0, 1, 0;
DirectionRow << 0, -1, -1, -1, 0, 1, 1, 1, 0;
Weights << 1.0 / 9, 1.0 / 36, 1.0 / 9, 1.0 / 36, 1.0 / 9, 1.0 / 36, 1.0 / 9, 1.0 / 36, 4.0 / 9;

double mUMax = 0.1;
double mRho = 1.0;
double mReynoldsNumber = 200.0;

mObstacleCol = (int)std::round(mCols / 5.0 + 3);
mObstacleRow = (int)std::round(mRows / 2.0 + 1);
mObstacleRadius = mRows / 10.0 + 1;
mNu = mUMax * 2.0 * mObstacleRadius / mReynoldsNumber;
mOmega = 1.0 / (3 * mNu + 0.5);

```

Výpis 1: Inicializace simulace (obtékání válce).

```

double lTubeWidth = mRows - 2;

Eigen::Matrix<double, -1, -1> lURow = Eigen::Matrix<double, -1, -1>::Zero(mRows, mCols);
Eigen::Matrix<double, -1, -1> lUCol = 4.0 * mUMax / (lTubeWidth * lTubeWidth) * (lRowPhysical
    * lTubeWidth - lRowPhysical.cwiseProduct(lRowPhysical));

```

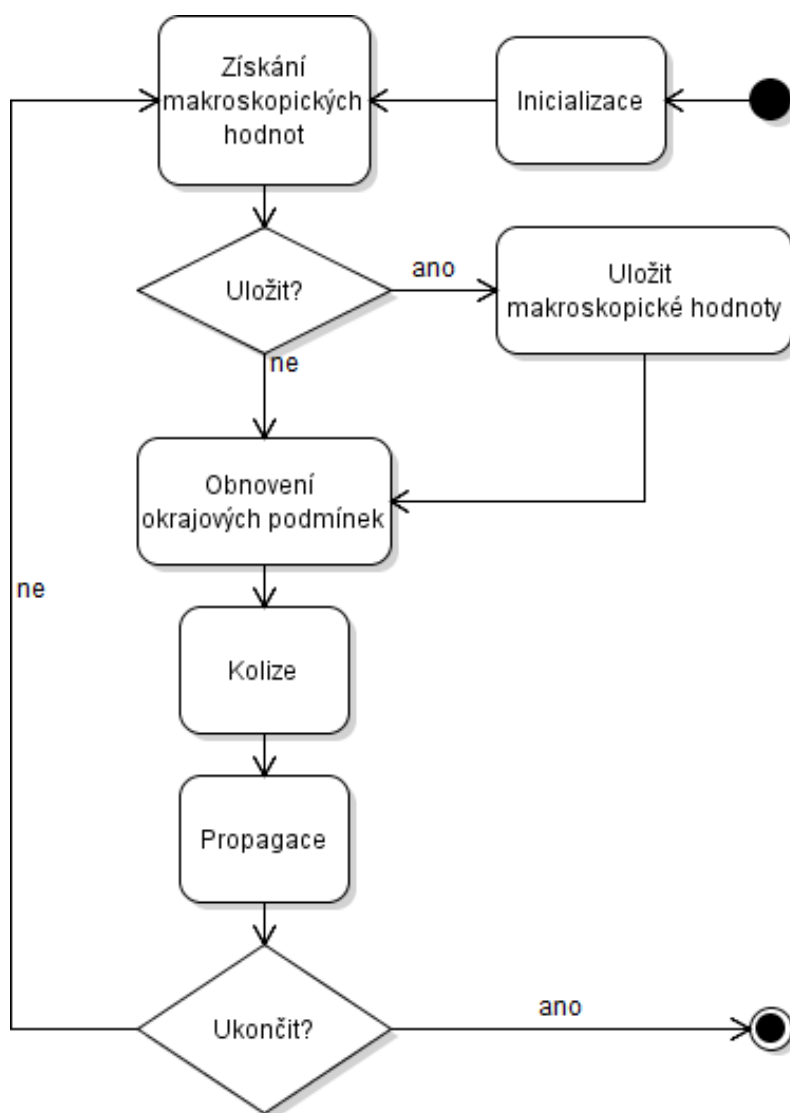
Výpis 2: Inicializace tekutiny (obtékání válce).

```

int lIterationCount = 10000; int lOutputCount = 0;
for (int i = 0; i < lIterationCount; i++)
{
    if (i % 20 == 0)
    {
        lEngine.MakeStep(lOutputCount);
        lOutputCount++;
    }
    else
        lEngine.MakeStep();
}

```

Výpis 3: Hlavní smyčka.



Obrázek 11: Diagram průběhu výpočtu metody LBM.

```

Eigen::MatrixXd ITempDensity[9];

for (int i = 0; i < 9; i++)
{
    Eigen::MatrixXd ICU = 3 * (GlobalFieldsEigen::DirectionCol[i] * IColU + GlobalFieldsEigen::
        DirectionRow[i] * IRowU);

    Eigen::MatrixXd IDensityEq = (ITotalDensity * GlobalFieldsEigen::Weights(i)).cwiseProduct(
        (Eigen::MatrixXd::Ones(mSize, mSize) + ICU + 1.0 / 2 * ICU.cwiseProduct(ICU) - 3.0 / 2 * (
            IColU.cwiseProduct(IColU) + IRowU.cwiseProduct(IRowU))));

    ITempDensity[i] = mDensity[i] + mOmega * (IDensityEq - mDensity[i]);
}

```

Výpis 4: Kolizní část iteračního kroku.

```

for (int i = 0; i < 8; i++)
{
    for (int iRow = 0; iRow < mSize; iRow++)
    {
        for (int iCol = 0; iCol < mSize; iCol++)
        {
            if (mObstacleMask(iRow, iCol))
            {
                ITempDensity[(i + 4) % 8](iRow, iCol) = mDensity[i](iRow, iCol);
            }
        }
    }
}

```

Výpis 5: Pravidlo "bounce-back".

```

// Macroscopic settings
for (int iCol = 0; iCol < mSize; iCol++)
{
    IColU(0, iCol) = mUTop;
}
IRowU.row(0).array() *= 0;

Eigen::VectorXd ISum048In = Eigen::VectorXd::Zero(mSize);
ISum048In += mDensity[0].row(0).transpose();
ISum048In += mDensity[4].row(0).transpose();
ISum048In += mDensity[8].row(0).transpose();

Eigen::VectorXd ISum123In = Eigen::VectorXd::Zero(mSize);
ISum123In += mDensity[1].row(0).transpose();
ISum123In += mDensity[2].row(0).transpose();
ISum123In += mDensity[3].row(0).transpose();

ITotalDensity .row(0) = Eigen::VectorXd::Ones(mSize)
    .cwiseQuotient(Eigen::VectorXd::Ones(mSize) + IRowU.row(0).transpose())
    .cwiseProduct(ISum048In + 2 * ISum123In).transpose();

```

Výpis 6: Okrajová podmínka Zou-He - makroskopická část (kavita).

```
// Microscopic settings
mDensity[6].row(0) = (mDensity[2].row(0)
  - 2.0 / 3 * lTotalDensity .row(0).cwiseProduct(lRowU.row(0))).transpose();
mDensity[7].row(0) = (mDensity[3].row(0)
  + 1.0 / 2 * (mDensity[4].row(0) - mDensity[0].row(0))
  + 1.0 / 2 * lTotalDensity .row(0).cwiseProduct(lColU.row(0))
  - 1.0 / 6 * lTotalDensity .row(0).cwiseProduct(lRowU.row(0))).transpose();
mDensity[5].row(0) = (mDensity[1].row(0)
  + 1.0 / 2 * (mDensity[0].row(0) - mDensity[4].row(0))
  - 1.0 / 2 * lTotalDensity .row(0).cwiseProduct(lColU.row(0))
  - 1.0 / 6 * lTotalDensity .row(0).cwiseProduct(lRowU.row(0))).transpose();
```

Výpis 7: Okrajová podmínka Zou-He - mikroskopická část (kavita).

Celý výpočet začíná inicializací mřížky a parametrů simulace. Nastaví se tedy hodnoty jako hodnoty směrových vektorů, váhy jednotlivých směrů, rozmístění překážek, viskozita nebo relaxační parametr. Ukázka je ve výpisu 1. Tyto hodnoty zůstanou po celou dobu simulace konstantní. Následně se nastaví počáteční stav tekutiny, její hustota a rychlost. Pro obtékání válce byly počáteční rychlosti v jednotlivých bodech určeny podle kvadratického (Poiseuillova) profilu. Inicializaci tekutiny je vidět ve výpisu 2.

Následuje hlavní smyčka programu, která probíhá tak dlouho, dokud není dosaženo maximálního stanoveného počtu iterací. Celá hlavní smyčka je ve výpisu 3. Nejdůležitější součástí hlavní smyčky je metoda *MakeStep*, která vykoná jeden kompletní simulační krok. Ten zahrnuje výpočet makroskopických hodnot ve všech uzlech mřížky z distribučních funkcí podle vztahů (2.3) a (2.5), jejich případné uložení, následně obnovení okrajových podmínek a provedení propagace a kolize.

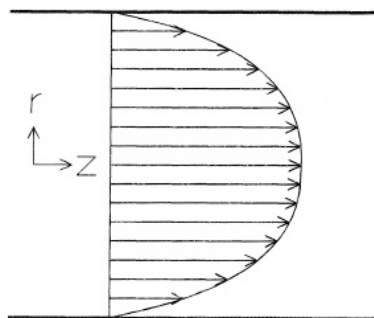
Implementace kolizní části iteračního kroku je ve výpisu 4. Výpočet rovnovážné distribuční funkce se provádí na celé mřížce matice pomocí prvkových operací, které knihovna Eigen nad maticí umožňuje. Tato část výpočtu je tedy velice jednoduše paralelizovatelná. O něco obtížnější situace je u propagační části algoritmu, kde je třeba pro každý uzel mřížky znát hodnoty distribučních funkcí z okolních uzlů. Nicméně i tak lze metodu LBM dobře a efektivně paralelizovat. Další výpis 5 obsahuje implementaci pravidla "bounce-back", konkrétně jeho nemodifikované verze. V této části bylo využito zavedeného způsobu indexování směrů mřížky a tedy vztahu (2.34). Poslední dva výpisy výpis 6 a 7 ukazují implementaci okrajové podmínky Zou-He pro horní okraj kavity.

4 Numerické experimenty

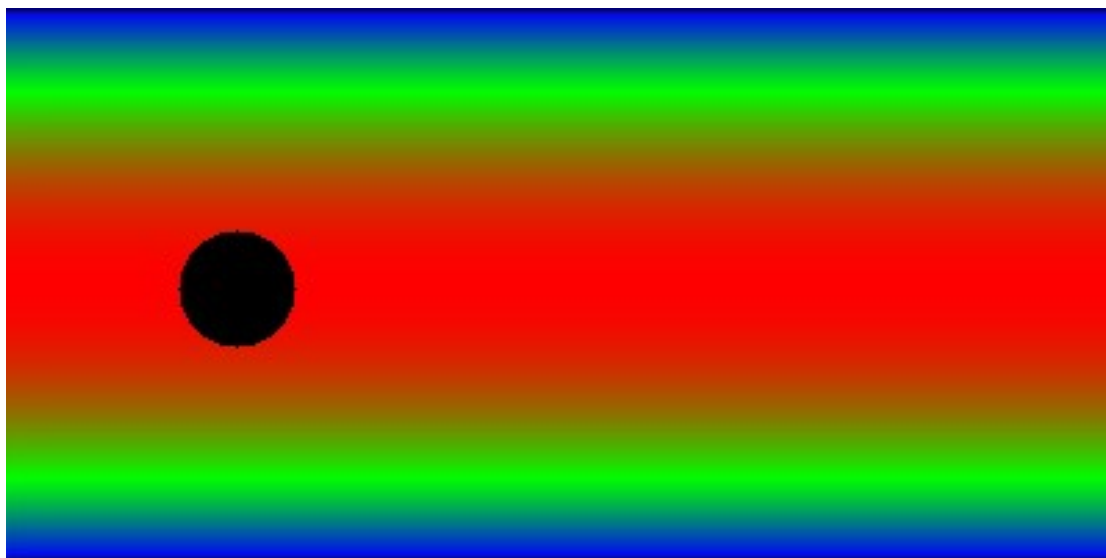
První z implementovaných simulací bylo obtékání válce v uzavřené oblasti. Počáteční stav simulace je vidět na obrázku 13, který zobrazuje velikost rychlosti proudění. Červená barva znamená nejvyšší rychlost, zelená střední, a modrá nejnižší. Na začátku simulace je nastaven kvadratický profil proudění (viz. obrázek 12), který je typický pro tuto situaci. Proudění probíhá zleva doprava. Hustota je na celé mřížce nastavena na konstantní hodnotu. Jedná se o nestlačitelné proudění. Horní a dolní okraj oblasti představuje stěnu a implementuje tedy pravidlo "bounce-back". Pravidlem "bounce-back" se řídí i obvod obtékaného válce. Na levém i pravém okraji je implementována okrajová podmínka Zou-He. Na levém okraji je definován právě kvadratický profil rychlosti, stejný jako na počátku simulace, a na pravém okraji konstantní tlak, tedy i hustota. Pro diskretizaci byla zvolena mřížka o velikosti 200×400 uzlů. Obrázek 14 ukazuje stav simulace v kroku 6000 pro Reynoldsovo číslo 50 a obrázek 15 příslušné vektorové pole. Proudění je v této fázi již ustálené a nijak výrazně se nemění. Za válcem lze vidět dva stabilní víry, každý s opačným smyslem otáčení.

Další simulace byla provedena pro stejný počáteční stav se stejně velkou mřížkou, ale tentokrát pro Reynoldsovo číslo 200. Na obrázku 16 vidíme opět krok 6000. Zde již proudění není zdaleka tak ustálené. Z odpovídajícího vektorového pole, které je na obrázku 17, a detailně pak na obrázku 18, lze pozorovat, že víry vznikající za válcem se odtrhávají a nechávají se unášet proudem, až časem zaniknou. Těmto vírům se říká Karmánovy víry a jejich výskyt je typický právě pro proudění s vyšším Reynoldsovým číslem.

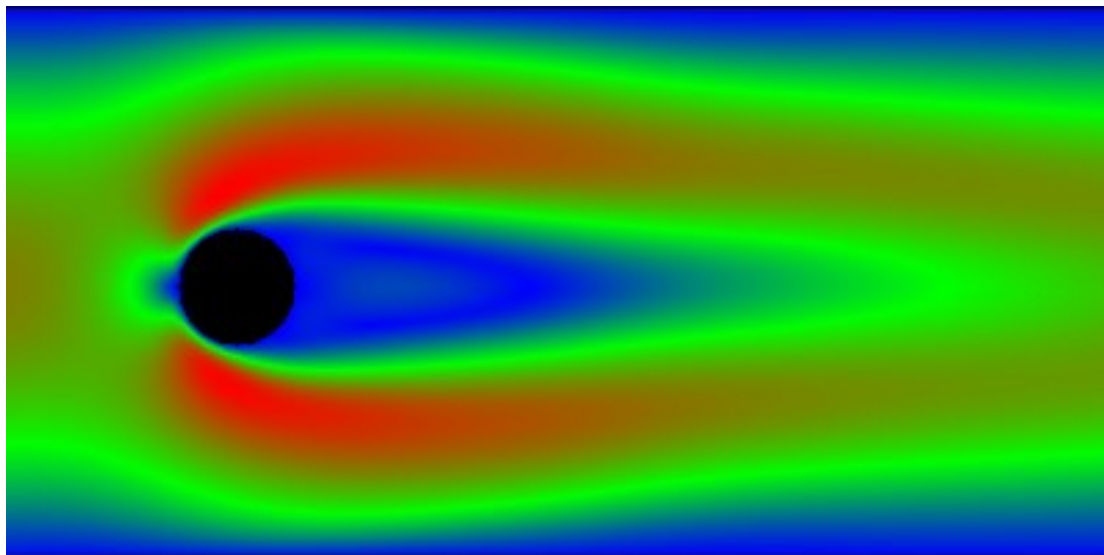
Poslední simulací je proudění v kavitě. Rychlostní profil v kroku 10000 je na obrázku 19. Hustota je opět stejná ve všech uzlech mřížky. Kavita je ze stran a zespodu uzavřena stěnou implementující pravidlo "bounce-back". Na horní hranici je stanovena konstantní horizontální rychlost směrem doprava, která je vynucena okrajovou podmínkou Zou-He. Na počátku simulace byla rychlost v celé dutině nastavena na 0. Velikost mřížky byla 200×200 uzlů. Rozvíření patrné z vektorového pole na obrázku 20 je tedy celé důsledkem působení horizontální rychlosti na horní hranici oblasti.



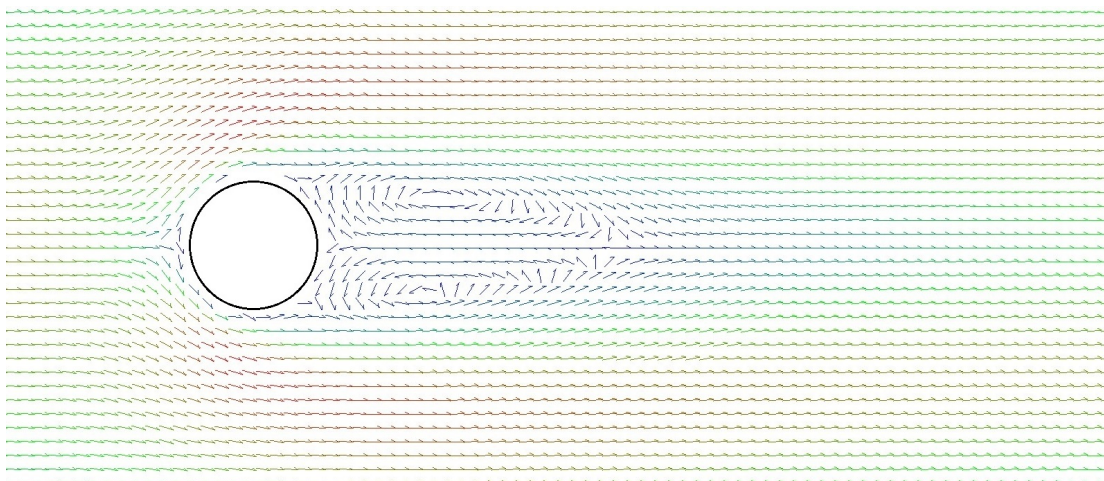
Obrázek 12: Kvadratický profil rychlosti.



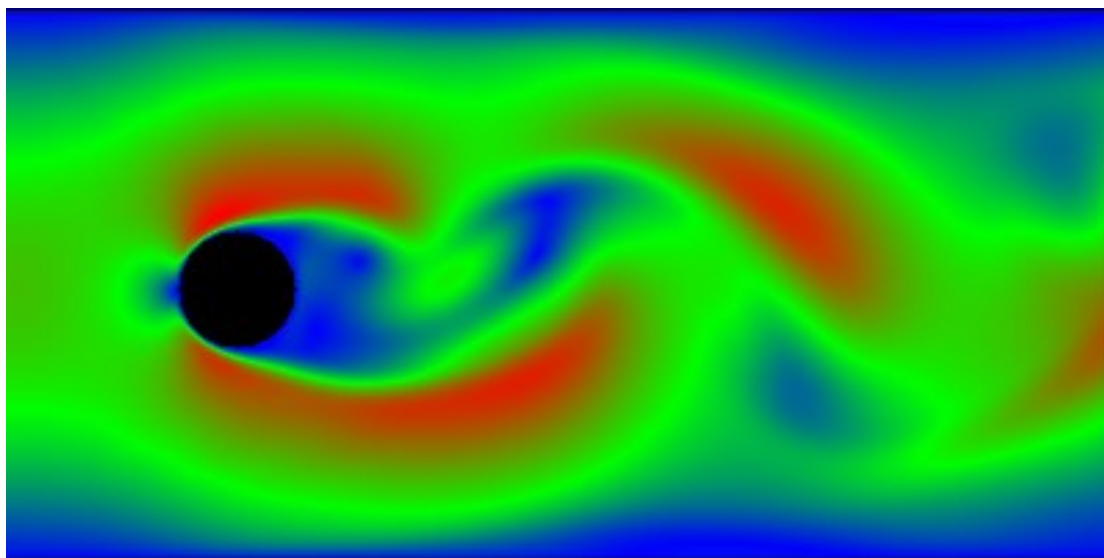
Obrázek 13: Obtékání válce: Reynoldsovo číslo 50, krok 0



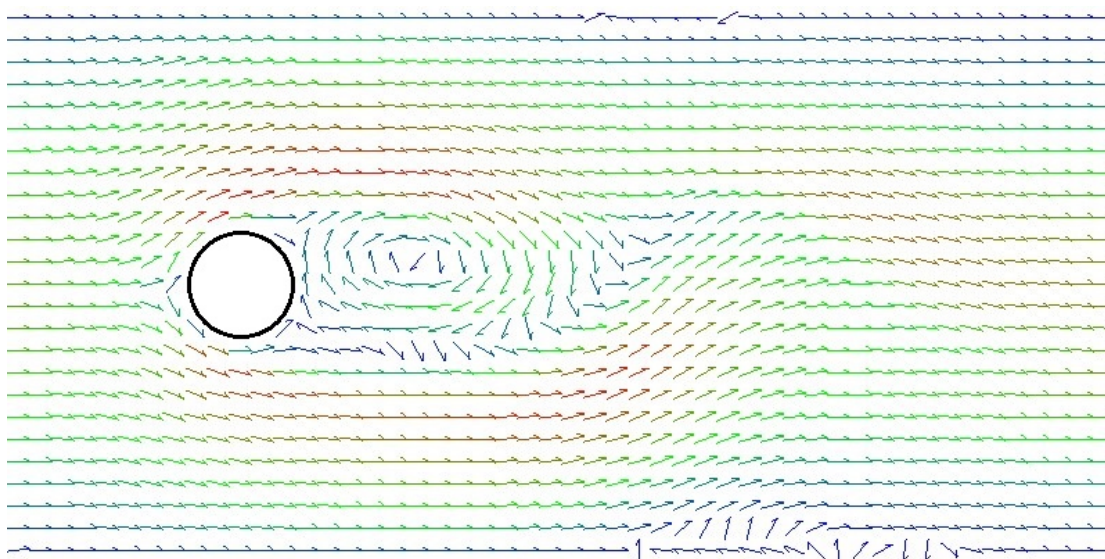
Obrázek 14: Obtékání válce: Reynoldsovo číslo 50, krok 6000



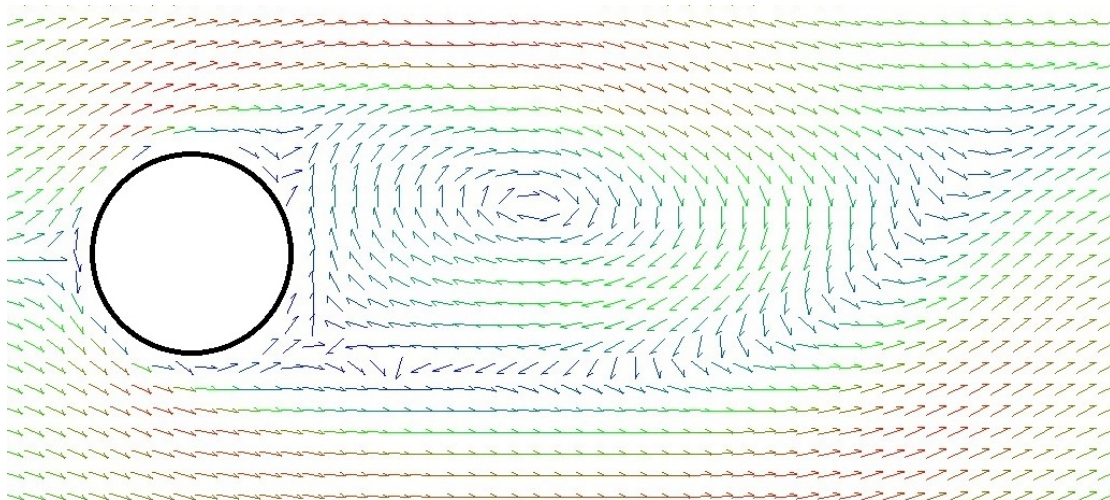
Obrázek 15: Obtékání válce: Reynoldsovo číslo 50, krok 6000



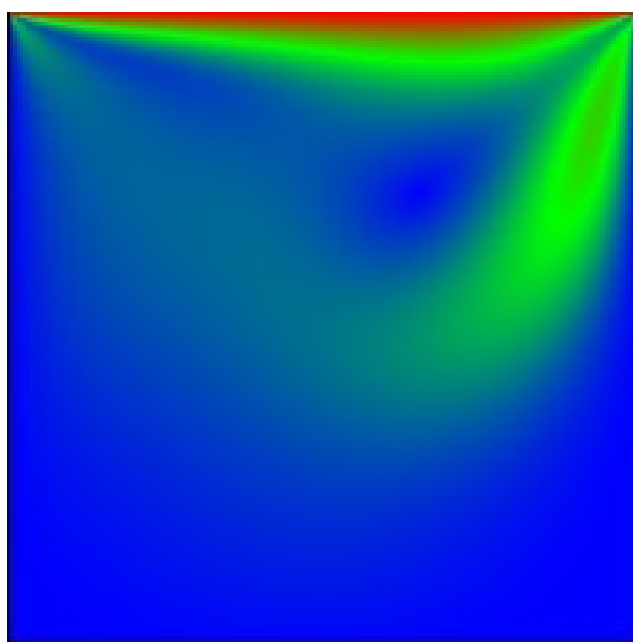
Obrázek 16: Obtékání válce: Reynoldsovo číslo 200, krok 6000



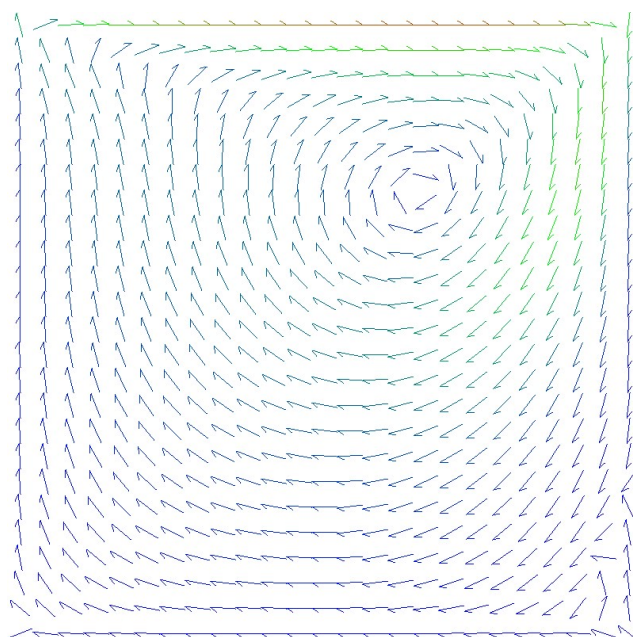
Obrázek 17: Obtékání válce: Reynoldsovo číslo 200, krok 6000



Obrázek 18: Obtékání válce: Reynoldsovo číslo 200, krok 6000



Obrázek 19: Kavita: Reynoldsovo číslo 200, krok 10000



Obrázek 20: Kavita: Reynoldsovo číslo 200, krok 10000

5 Závěr

V práci jsme se seznámili s teoretickým základem metody Lattice Boltzmann. Zmínili jsme její historický vývoj a některé přednosti, jako například jednoduché a intuitivní principy nebo snadnou implementaci překážek libovolných tvarů, které z ní dělají perspektivní metodu pro budoucnost numerického řešení proudění tekutin. Obzvláště její lokální povaha, tedy fakt že pro výpočet další iterace hodnot distribučních funkcí je třeba pro každý uzel znát pouze hodnoty okolních uzlů a uzlu samotného, otevírá možnosti pro efektivní paralelizaci.

V druhé části práce jsme si ukázali několik příkladů výpočtu úloh proudění. Obtékání válce je jedním z typických demonstračních příkladů, na kterém je dobře vidět vliv Reynoldsova čísla na výsledný rychlostní profil. Ukázali jsme, že při vyšších Reynoldsových číslech již nemusí vůbec dojít k ustálení proudění. Proudění v kavitě je pak typickým příkladem situace, kdy nedochází k přenosu hmoty ven ani dovnitř výpočetní oblasti, jak je tomu u válce.

6 Reference

- [1] PENG, Chen. *The Lattice Boltzmann Method for Fluid Dynamics: Theory and Applications* [online]. Lausanne, Switzerland, 2011 [cit. 2015-04-25]. Dostupné z: <http://cmcs.epfl.ch/files/content/sites/cmcs/files/People/Peng%20Chen/LBM.pdf>. Master's thesis. École Polytechnique Fédérale de Lausanne. Vedoucí práce Professor Alfio Quarteroni, Doctor Matteo Astorino.
- [2] WAGNER, Alexander J. *A Practical Introduction to the Lattice Boltzmann Method* [online]. Fargo, North Dakota, USA, 2008 [cit. 2015-04-25]. Dostupné z: <http://www.ndsu.edu/fileadmin/physics.ndsu.edu/Wagner/LBbook.pdf>. Academic paper. Nort Dakota State University.
- [3] LATT, Jonas. *Choice of units in lattice Boltzmann simulations*. [online]. 2008 [cit. 2015-04-25]. Dostupné z: http://wiki.palabos.org/_media/howtos:lbunits.pdf
- [4] CHEN, Shiyi a Gary D. DOOLEN. *Lattice Boltzmann Method For Fluid FLoWs. Annual Reviews Of Fluid Mechanics* [online]. 1998, roč. 30, 329-64 [cit. 2015-05-01]. Dostupné z: <http://www.annualreviews.org/doi/pdf/10.1146/annurev.fluid.30.1.329>
- [5] WYLIE, Brian J.N. *Application of Two-Dimensional Cellular Automaton Lattice-Gas Models to the Simulation of Hydrodynamics* [online]. Edinburgh, 1990 [cit. 2015-05-01]. Dostupné z: http://pages.cs.wisc.edu/wylie/doc/PhD_thesis.pdf. PhD. thesis. University of Edinburgh.
- [6] FEFFERMAN, Charles L. *Existence and Smoothness of the Navier-Stokes Equation*. [online]. [cit. 2015-05-02]. Dostupné z: <http://www.claymath.org/sites/default/files/navierstokes.pdf>
- [7] BAO, Yuanxun Bill a Justin MESKAS. *Lattice Boltzmann Method for Fluid Simulations* [online]. New York, 2011 [cit. 2015-05-05]. Dostupné z: <http://www.cims.nyu.edu/~billbao/report930.pdf>. New York University.
- [8] VIGGEN, Erlend Magnus. *The Lattice Boltzmann Method with Applications in Acoustics* [online]. Trondheim, Norway, 2009 [cit. 2015-05-05]. Dostupné z: <http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:279558/FULLTEXT01.pdf>. Master's thesis. Department of Physics, NTNU.
- [9] ZOU, Qisu a Xiaoyi HE. 1997. *On pressure and velocity boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model*. Physics of Fluids [online]. 9(6): 8 [cit. 2015-05-06]. Dostupné z: http://mitranlab.amath.unc.edu:8081/subversion/VirtualLung/qPAflow/biblio/PhysFluids_9_1591.pdf